UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BASICAS Y HUMANIDADES

P.A.: 2024-2

Fecha: 18/10/24

EXAMEN FINAL DE "*MÉTODOS NUMÉRICOS* (M*B536*)"

Coordinador del curso: Ing. Robert Castro Salguero

NOTA IMPORTANTE A LOS ALUMNOS

ESTÁ TERMINANTEMENTE PROHIBIDO COLOCAR DENTRO DEL CUADERNILLO MARCAS (TEXTOSO SEÑALES DE CUALQUIER TIPO) QUE PERMITAN DETERMINAR SU IDENTIDAD. **EN CASO DE INCUMPLIMIENTO, EL EXAMEN SERÁ ANULADO, SIN NINGÚN DERECHO DE RECLAMO**.

INDICACIONES

1. Duración: 110 minutos.
2. Se permite el uso de 2 hojas de formulario tamaño A4, sin solucionarios, calculadoras científicas y/o programable sin internet.
3. Prohibido el uso de celulares y medios de comunicación electrónica y calculadoras con Wi-Fi o Bluetooth.
4. Escribe tus respuestas de manera clara y legible y asegúrate de que cada paso de tu razonamiento y cálculo esté claramente justificado.

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

PARTE I
Responda a las siguientes preguntas

1. **(1.0P)** Convierta el siguiente número binario, codificado según la notación del estándar IEEE 754 de **simple precisión** (32 bits), a su equivalente en base decimal:

0 10000000 11000000000000000000000

Indique cada uno de los pasos del proceso de conversión.

Solución

Signo: 0 (positivo)

Exponente: 10000000 =>128-127=1

Mantisa: 11000000000000000000000=> 1.11=>1+1/2+1/4=1.75

+1.75*2^1=3.5

2. **(1.0P)** Sea el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4m+1 \\ 0 & 4 & 5m+2 \\ 0 & 8 & 6m+8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

¿Para qué valor o valores de m el sistema es inconsistente o no tiene solución?

Solución

Llevando la matriz a la forma escalonada por filas:

F3=F3-2*F2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4m+1 \\ 0 & 4 & 5m+2 \\ 0 & 0 & 4-4m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema tendrá solución única si R(A)=R(Ab)=3, en este caso cuando $4-4m \neq 0$, es decir cuando m≠1

El sistema tendrá solución indeterminada si R(A)=R(Ab)=2<3, en este caso cuando $4-4m=0$, es decir cuando $m=1$.

Por lo tanto, no existe ningún valor para el cual es sistema sea absurdo.

3. **(1.0P)** A partir de los valores propios $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 2$, y de los vectores propios correspondientes $v_1 = \binom{1}{1}$ y $v_2 = \binom{1}{-2}$, determine la matriz A.

Solución

Valores y sus vectores propios:

- $\lambda_1 = 5$ con vector propio $v_1 = \binom{1}{1}$
- $\lambda_2 = 2$ con vector propio $v_2 = \binom{1}{-2}$

P : Matriz de vectores propios

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

D : Matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Utilizamos la relación $A = PDP^{-1}$:

$$A = PDP^{-1}$$

Realizando las multiplicaciones:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. **(1.0P)** En ciertas funciones exponenciales, los valores cercanos a la raíz pueden tomar pendientes muy pequeñas, lo que impide la convergencia del método de Newton-Raphson. Complete el código para manejar este caso, de manera que el programa finalice mostrando un mensaje. Este mensaje debe indicar que el problema no es por desbordamiento numérico, sino por la presencia de una derivada con un valor muy pequeño o por no haber convergido debido al exceso de iteraciones máximas permitidas.

```
f=@(x)exp((5-3*x)/2)-0.5;                              % función f(x)

df=@(x)-3/2*x.*exp((5-3*x)/2);                         % derivada f'(x)

tol = 1e-5;                      % Tolerancia para convergencia
max_iter = 100;                  % Máximo número de iteraciones
iter = 0;                        % Contador de iteraciones
x0 = 100;                        % Valor inicial de la raíz
iter = 0;                        % Inicializamos variables
x = x0;
while iter < maxIter

  if abs(df(x0)) < eps        % Verificar si derivada es muy pequeña

                              % con respecto al épsilon de la maquina

         fprintf('Derivada demasiado pequeña  .\n')

         break;
  end
    % Actualizar valor de x usando M. Newton-Raphson
    x = x0 - f(x0) / df(x0);
     % Verificar si error de sucesión es menor que la tolerancia

    if abs(x - x0) < tol

       raiz = x;
       fprintf('Convergencia alcanzada en la iteración %d.\n',iter);
       break;
    end
    % Actualizamos x y contamos las iteraciones
    x0 = x;
    iter = iter + 1;
end
% Si se llega al número máximo de iteraciones sin converger
if iter==maxIter
   fprintf('No alcanzó convergencia después de %d itera.\n',  maxIter);
end
```

PARTE II

Problema 1

En el ámbito de las telecomunicaciones, el cálculo preciso de la potencia de la señal recibida es crucial para garantizar la calidad de la comunicación. Esta potencia, denotada como P_r, se modela mediante la siguiente fórmula:

$P_r = e^{-ad} \cdot \sin(\theta) \cdot \ln(t)$

donde:

- P_r es la potencia de la señal recibida (en vatios, W).
- a es una constante de atenuación ($a = 0.02$).
- d es la distancia desde la antena emisora hasta la receptora (en metros, m).
- θ es el ángulo de incidencia de la señal respecto a la horizontal (en radianes).
- t es el tiempo de transmisión (en segundos).

Los parámetros dados son:

- Distancia: $d = 100m$ con un error de $\Delta d = 0.5m$.
- Ángulo de Incidencia: $\theta = 0.5\text{rad}$ con un error de $\Delta\theta = 0.01\text{rad}$.
- Tiempo de Transmisión: $t = 20$ s con un error de $\Delta t = 0.2$ s.

Se pide:

a) **(1.0P)** Estime el valor de potencia P_r
b) **(2.0P)** Calcule el máximo error absoluto de la potencia P_r.
c) **(1.0P)** Determine el rango de variación de la potencia P_r.

Solución:

(a)

Potencia nominal: $P_r = 0.1944$

(b)

Calculamos el error absoluto para la Potencia P_r

$$er_d = \left|\frac{\partial P_r}{\partial d}\right| \cdot \Delta d \approx 0.0019 \text{ W}$$

$$er_{\theta} = \left|\frac{\partial P_r}{\partial \theta}\right| \cdot \Delta\theta \approx 0.0036W$$

$$er_{t} = \left|\frac{\partial P_r}{\partial t}\right| \cdot \Delta t \approx 6.488310\text{^\{}-4\text{\}}\ \mathrm{W}$$

$$er_{pr} = er_d + er_{\theta} + er_t \approx 0.0019 + 0.0036 + 6.4883 \times 10\text{^\{}-4\text{\}} \approx 0.0062W$$

(c)

Rango de Variación: [0.1882W; 0.2005W]

Problema 2

La solución de sistemas de ecuaciones lineales es fundamental en el análisis de circuitos DC y AC en estado estacionario. A partir del **Figura 1**, usando el análisis de mallas, se requiere seguir los siguientes pasos para determinar las corrientes de malla I_1, I_2 y I_3.

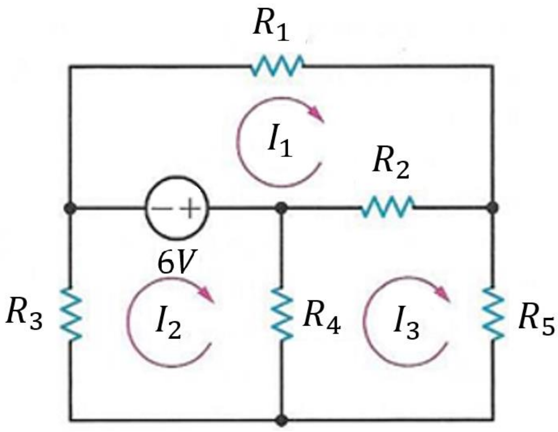


Figura 1 Circuito Eléctrico

Resistencias del Circuito Eléctrico:

$R_1 = 4\ k\Omega$; $R_2 = 6k\Omega$; $R_3 = 9\ k\Omega$;
$R_4 = 3\ k\Omega$; $R_5 = 12\ k\Omega$.

a) **(1P)** Formula el sistema lineal $A * I = V$ usando la Ley de Voltajes de Kirchhoff aplicado al **circuito eléctrico**.
Ayuda:

$$10I_1 \qquad - 6I_3 = \quad 6 \qquad\qquad (\text{Ec. } 1)$$

Solución

$$\begin{aligned} 10I_1 - 6I_3 &= 6 && (\text{Ec. } 1)\\ -12I_2 + 3I_3 &= -6 && (\text{Ec. } 2)\\ -6I_1 - 3I_2 + 21I_3 &= 0 && (\text{Ec. } 3)\end{aligned}$$

Que se puede escribir en forma matricial como:$A \cdot I = \mathrm{V}$

Donde: $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & -12 & 3 \\ -6 & -3 & 21 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) **(1P)** Usa la factorización de Doolittle para descomponer A en L y U.

Solución

Aplicamos el método de Doolittle paso a paso para obtener las siguientes matrices:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 16.65 \end{pmatrix}$$

c) **1P)** Resuelve $L * y = V$, con sustitución directa.

Solución

Primero, resolvemos el sistema $L \cdot y = b$ usando sustitución hacia adelante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones son:

$$y_1 = 6$$
$$y_2 = -6$$
$$-0.6y_1 + 0.25y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow -0.6(6) + 0.25(-6) + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 5.1$$

Así que, obtenemos:

$$y = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 5.1 \end{pmatrix}$$

d) **(1P)** Resuelve $U * I = y$ con sustitución inversa y comenta los resultados obtenidos para las corrientes en cada malla.

Solución

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 16.65 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 5.1 \end{pmatrix}$$

Primera ecuación (de la tercera fila):

$$16.65I_3 = 5.1 \Rightarrow I_3 = \frac{5.1}{16.65} = 0.3063 \text{ mA}$$

Segunda ecuación (de la segunda fila):

$$-12I_2 + 3(0.3063) = -6$$

$$-12I_2 + 0.919 = -6 \Rightarrow I_2 = \frac{-6 - 0.919}{-12} = 0.5766 \text{ mA}$$

Tercera ecuación (de la primera fila):

$$10I_1 - 6(0.3063) = 6$$

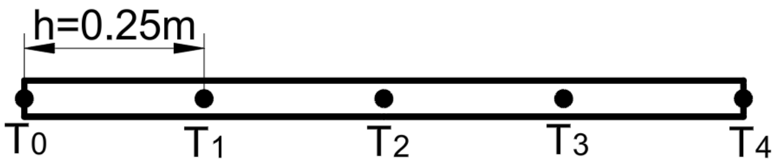
$$10I_1 - 1.8378 = 6 \Rightarrow I_1 = \frac{6 + 1.8378}{10} = 0.7838 \text{ mA}$$

Las corrientes en cada malla del circuito son:

$$I_1 = 0.7838 \text{ mA},\ I_2 = 0.5766 \text{ mA},\ I_3 = 0.3063 \text{ mA}$$

Los resultados calculados reflejan cómo se distribuye la corriente a través de cada parte del circuito en función de las resistencias y la fuente de voltaje, lo que nos permite prever el comportamiento eléctrico bajo condiciones de operación normales.

Problema 3



Una barra metálica está sometida a un proceso de conducción de calor con generación uniforme de calor. La barra está dividida en cinco nodos, donde los extremos se mantienen a temperaturas fijas $T_0 = 293\ K$ y $T_4 = 393\ K$. Los tres nodos intermedios T_1, T_2, T_3 necesitan ser calculados utilizando el método de diferencias finitas. El coeficiente de conductividad térmica de la barra es $k = 200\ W/mK$, y la tasa de generación de calor uniforme es $q = 100\ W/m^3$. La distancia entre los nodos es $h = 0.25\ m$.

La distribución de temperatura a lo largo de la barra es modelada por la ecuación diferencial de la conducción de calor, que en su forma discreta utilizando el método de diferencias finitas se representa como:

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} = \frac{q}{k}$$

donde i corresponde a los nodos intermedios 1, 2 y 3.

a) **(1.0P)** Formule el sistema de ecuaciones lineales que describe el problema utilizando el método de diferencias finitas para los tres puntos intermedios.

b) **(1.0P)** Evalúe si el método iterativo de Jacobi puede ser utilizado para resolver el sistema de ecuaciones. Justifique con el criterio de convergencia adecuado.

c) **(1.5P)** Resuelva el sistema de ecuaciones utilizando el método iterativo de Jacobi, comenzando con un vector inicial de $T_1 = T_2 = T_3 = 350\ K$. Realice una iteración del método y presente los resultados.

d) **(0.5P)** Calcule el error relativo porcentual comparando la solución obtenida en c) y el valor real $[317.9531, 342.9375, 367.9531]^T$, utilizando la norma infinita.

Solución

a)

-2T1 +T2+ 0T3=-292.96875

T1-2T2+T3=0.03125

0T1+T2-2T3=-392.96875

b)

La matriz A no es diagonal dominante, por lo tanto, se recurre al cálculo del radio espectral de la matriz T de Jacobi, la cual es 0.7071, por lo tanto, converge.

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(T) = 0.7071 < 1$$

c)

$$C=\begin{pmatrix} 2.25 \\ 2.6667 \\ 5 \end{pmatrix}$$

X^0=[350; 350; 350]

X^1=T*X^0+C

X^1= [321.4844; 349.9844; 371.4844]

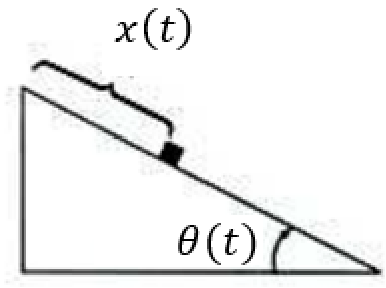
d)

Error relativo = 0.0192=1.92%

Problema 4

a) Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ varía con una rapidez constante de:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$$



Al final de un tiempo ***t***, la posición del objeto está descrita por la función:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - sen(\omega t)\right)$$

Si la partícula se desplazó 0.5 metros en 1 segundo, se desea determinar la rapidez ω con que cambia θ. Considere g=9.81 m/s^2.

a) **(1.0P)** Plantee la ecuación $f(w) = 0$ y localice la solución aplicando el teorema de Bolzano, teniendo en cuenta los siguientes intervalos candidatos: [-3.1,-2.1]; [-2.1,-1.1] y [-1.1,-0.1].
b) **(1.0P)** Realice 02 iteraciones de bisección paso a paso y estime el error en cada iteración.
c) **(1.5P)** Aplique Newton-Raphson paso a paso, partir del punto medio del último intervalo obtenido en b) hasta tener una precisión de 10^{-5}.
d) **(0.5P)** Compare los resultados alcanzados por ambos métodos en términos de la convergencia y la precisión obtenida.

Solución

a)

$$F(\omega) = 0.5 + \frac{9.81}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} - sen(\omega)\right)$$

```
F(-3.1)=-5.1323
F(-2.1)=-3.0132
F(-1.1)=-1.3016
F(-0.1)= 0.3365
```

Como la función es continua en [-1.1,-0.1] y la función cambia de signo, se garantiza la existencia de por lo menos una raíz en dicho intervalo.

b) Bisección

```
xi      xr          xs        err
-1.1    -0.6        -0.1      0.5
-0.6    -0.35       -0.1      0.25
-0.35   -0.225      -0.1      0.125
```

c) Newton-Raphson:

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{F(\omega_n)}{F^{'}(\omega_n)} \qquad r^{n+1} = \lfloor \omega_{n+1} - \omega_n \rfloor \qquad TOL = \; 10^{-5}$$

x0 =-0.225
x1 =-0.305808478306329
r1 = 0.080808478306329
x2 =-0.305807213650562
r2 = 1.264655767219125e-06<TOL=10^{-5}

d) Se observa claramente que el Método de Newton-Raphson converge de una manera mucho más rápido que bisección debido a su convergencia cuadrática.